

Seminar für das Lehramt an Gymnasien und Gesamtschulen Bonn  
Tel: 0228 96 94 32 0, Fax: 0228 9694 3232, Wegelerstr. 1, 53115 Bonn,  
[Verwaltung@Seminar-Bonn.de](mailto:Verwaltung@Seminar-Bonn.de) , <http://www.studienseminare.nrw.de/ge-gym/BN/>

# **Unterrichtskonzept zur Einführung von Ellipsen in der Koordinatengeometrie Jahrgangsstufe 11**

**Autor:** Dr. Peter Scholl  
**email:** scholl(bei)unterrichtsportal.org

**Schule:** Integrierte Gesamtschule Bonn-Beuel

**Fach:** Mathematik  
**Klasse:** Grundkurs Jahrgangsstufe 11 (Laptop-Kurs)

**Thema:** Einführung der Ellipse unter Behandlung  
verschiedener Methoden der Darstellung.

**Fachseminarleiterin:** Frau Maria Nelles

## 1. Stundenziel und Teilziele

Zentrales Stundenziel:

Die Schülerinnen und Schüler vergleichen verschieden Darstellungsformen der Ellipse und ordnen diese einander zu.

Inhaltliche Feinziele:

1. Die Schülerinnen und Schüler lernen besondere Punkte und Strecken der Ellipse, insbesondere die Hauptachse und Nebenachse, kennen. Dabei wird die mathematisch exakte Definition dieser Begriffe zunächst vernachlässigt.
2. Sie erkennen die Symmetrien der Ellipse
3. und unterscheiden zwischen einer Darstellung, die auf der Kenntnis der Brennpunkte basiert und einer Darstellung die durch die Länge der Achsen bzw. Halbachsen beschrieben wird.

Prozessbezogene Feinziele:

4. Die Schülerinnen und Schüler erforschen eine gegebene Konstruktion und nutzen dabei verschiedene Hilfsmittel und Medien.
5. Sie erläutern Mitlernenden eine von ihnen untersuchte Konstruktion der Ellipse und verbalisieren dabei ihre Denkprozesse.
6. Einige Schülerinnen und Schüler präsentieren die Ergebnisse der Gruppenarbeit und begründen dabei die in der Gruppe getroffenen Entscheidungen.

## 2. Beschreibung der besonderen Lerngruppenbedingungen

Bei dem Kurs, für den diese Unterrichtsstunde entwickelt wurde, handelt es sich um einen Laptop Kurs, d.h. alle Schülerinnen und Schüler haben sich entschieden, einen Laptop, der von der Schule beschafft und eingerichtet wurde, zu erwerben. Die Stunde ist aber nicht von dieser Voraussetzung abhängig. Da nicht alle Gruppen Software einsetzen und auch nicht individuell einen PC nutzen müssen, bietet sich ebenso ein Laptopwagen oder auch ein Computerraum, der genügend Platz für die übrigen Gruppen bietet, an. In diesem Kurs wurde die Software Euklid DynaGeo eingesetzt und die Arbeitsblätter dafür entwickelt. Alles lässt sich aber sehr leicht auch auf Geogebra<sup>1</sup>, eine freie und inzwischen von mir bevorzugt eingesetzte Software, übertragen. Zur Einführung dynamischer Geometriesoftware habe ich bereits bei der Behandlung von Parabeln mit dynamischer Geometriesoftware gearbeitet und die Leitgradenkonstruktion von Parabeln untersucht<sup>2</sup>.

## 3. Einsatz der Stunde im Rahmen des Unterrichts der Jahrgangsstufe 11

Diese Stunde ist eine Einführung in die Unterrichtseinheit zu Ellipsen und Kreisen. Sie schließt sich direkt an die Behandlung der Parabeln an und ist somit eine Fortsetzung der quadratischen Gleichungen. Die bei den Parabeln entwickelten Konzepte zu Tangenten und zur Verschiebung eines Graphen im Koordinatensystem sollen im Rahmen der Unterrichtseinheit auf den Themenkreis der Ellipsen ausgeweitet werden. Desweiteren wird natürlich der Umgang mit und das Lösen von quadratischen Gleichungen vertieft. Eine Übersicht über die Themengebiete der Gesamtreihe zu Parabeln und Ellipsen ist als Advance Organizer, der als strukturierendes Element für die Planung und für die Schülerinnen und Schüler dienen kann, angehängt. Der Verlauf der Folgestunden könnte wie folgt aussehen:

---

<sup>1</sup> siehe <http://www.geogebra.at>

<sup>2</sup> Entsprechende Arbeitsblätter können beim Autor oder über das Unterrichtsportal bezogen werden.

Datum	Inhalt
2 Stunden	Einführung der Ellipse unter Berücksichtigung mehrerer Darstellungsformen
2 Stunden	Transformation zwischen Darstellungsformen lineare Exzentrizität und Achsen – Begriffsdefinition
1 Stunde / Kurzvortrag	Perihel und Aphel Beschreibung von Planetenbahnen (Übungen)
2 Stunden	Tangenten an die Ellipse – rechnerisch und geometrisch Flüstergewölbe

#### 4. Didaktischer Kommentar

##### Innerfachliche Bedeutung

Die Richtlinien für die Sekundarstufe II enthalten als Themen für die Koordinatengeometrie Gerade, Parabel und Kreis. Ellipsen sind nicht ausdrücklich erwähnt und lassen sich somit nur als Verallgemeinerung des Kreises, der als Spezialfall enthalten ist, rechtfertigen. Die algebraische Behandlung (quadratische Gleichungen in  $x$  und  $y$ ) von Ellipsen entspricht der des Kreises nahezu vollständig. Von den möglichen begrifflichen Zugängen ist die Ellipse jedoch deutlich reichhaltiger und bietet somit auch mehr Untersuchungsmaterial für den Unterricht. Ihre Vernachlässigung kann, wenn man es auf die Spitze treiben möchte, mit der ausschließlichen Betrachtung der Normalparabel im Themenkreis Parabeln verglichen werden.

Der Kreis oder die Kugel ist als geometrisches Objekt in seiner Schönheit und Vollkommenheit sicherlich etwas besonderes, doch die Ellipse bzw. Ellipsoide stehen hier keineswegs zurück und treten häufig in Erscheinung, z.B. bei der Parallelprojektion als Schnittkurven oder Schattenlinien. Das alltagsübliches Ei als geometrisches Objekt ist ohne ein Verständnis der Ellipse fast nicht beschreibbar.

Neben den Parabeln sind die Ellipsen die zweite wichtige Klasse von Kurven, die als Kegelschnitte erzeugt werden können. Die Kegelschnitte liefern ein sehr schönes Beispiel zur Klassifizierung und Strukturierung einer Menge von Objekten und der Schaffung eines Zusammenhangs, der nicht auf den ersten Blick offensichtlich ist. Zur Klassifizierung der Kegelschnitte kann die dimensionslose numerische Exzentrizität herangezogen werden, die besonders leicht bei einer Darstellung in Polarkoordinaten angegeben werden kann. Der Schritt zu den Hyperbeln, dem noch fehlenden Kegelschnitt, ist auch von den in diesem Gruppenpuzzle verwendeten Zugängen leicht zu gehen. Bei der Betrachtung des Graphen der Ellipsengleichung muss nur das Plus durch ein Minus ausgetauscht werden oder bei der Faltkreis- bzw. Leitkreiskonstruktion wird der Punkt  $P$  außerhalb des Kreises gewählt. Wobei letzteres sogar eine Fragestellung ist, die von Schülern in einer forschenden Atmosphäre selbständig gefunden und bearbeitet werden könnte. Einen solchen erweiternden Schritt habe ich jedoch im Unterricht nicht unternommen, je nach Kurs ist aber auch hierzu vielleicht die Möglichkeit der Vergabe eines Schülervortrages eine schöne Option.

Auch im Rahmen der Physik haben Ellipsen zur Beschreibung verschiedener Phänomene und Vorgänge Anwendungsbedeutung und bieten somit Anlass zur Vertiefung der Idee des mathematischen Modellierens. Zu vorderst sind hier die Planetenbahnen zu nennen, bei denen auch der Brennpunkt zu expliziter Bedeutung kommt. Aber auch schon die Form der Erde ist keine Kugel sondern besser durch einen Ellipsoid zu beschreiben. Weitere bekannte Anwendungen sind Flüstergewölbe und der auf dem gleichen Prinzip basierende Nierensteinzertrümmerer.

##### Schwerpunktsetzung

Der Schwerpunkt der Stunde liegt auf der horizontalen Vernetzung der Schülerinnen und Schüler bei der Begriffsbildung. Den Schülerinnen und Schülern werden mehrere

Darstellungsmöglichkeiten und damit auch Zugänge zur Ellipse angeboten. Darunter finden sich enaktive Zugänge wie die Gärtnerkonstruktion und die Faltkonstruktion bis zum symbolischen Zugang über die Gleichung zur Ellipse im Koordinatensystem. Auf diese Weise können Schüler die Vielseitigkeit der Ellipse erfahren und einen für sie selbst verständlichen Zugang finden. Gleichzeitig wird jedoch besonderer Wert auf den Vergleich der Zugänge<sup>3</sup> gelegt, so dass für die Schüler nicht ein bzw. ihr Zugang im Mittelpunkt steht, sondern der Zusammenhang zu den anderen auch deutlich wird. Damit werden zwei der von Freudenthal<sup>4</sup> beschriebenen Stufen der Strenge bei der Begriffsbildung berücksichtigt (die Erfahrung und das praktische Handeln und das Ordnen der Erfahrungen nach Merkmalen).

Die Behandlung von Anwendungsmöglichkeiten insbesondere den Planetenbahnen und dem Flüstergewölbe durch die Lernenden werden Anknüpfungspunkte in anderen Wissensgebieten angeboten.

### **Didaktische Reduktion**

In der Unterrichtsstunde wird entsprechend der Schwerpunktsetzung nicht auf die Einführung der Begriffe und die exakte Verwendung von Fachsprache eingegangen. Gerade bei der Ellipse ist die Vielzahl der Begriffe wie Nebenscheitel, Halbachse, Exzentrizität und Leitkreis eher verwirrend. Die Schüler sollen ohne Vorgaben intuitiv zunächst eigene Bezeichnungen für die von ihnen betrachteten und für sie besonderen Größen der Ellipse verwenden.

Dementsprechend findet im Rahmen der Stunde auch kein expliziter Vergleich der Zugänge, der unweigerlich auf ein Umrechnen der bestimmenden Größen einer Brennpunktdarstellung in eine Achsen- bzw. Halbachsendarstellung und umgekehrt führen würde, angestrebt. Die Herleitung der Gleichung zwischen linearer Exzentrizität und Länge der Halbachsen wird auf die nächste Stunde und die Hausaufgabe hinausgeschoben.

### **Allgemeines**

Im Sinne einer erfolgreichen Begriffsbildung, die zu den mathematischen Kerntätigkeiten zählt, ist es erforderlich den Schülerinnen und Schülern für einen nachhaltigen Aufbau des Verständnisses möglichst viele Anknüpfungspunkte für eine vielseitige Vernetzung zu geben<sup>5</sup>. Dies ist die Grundidee, die in dieser Stunde umgesetzt werden soll. Im Rahmen der Doppelstunde, soll vor allem die Möglichkeit geboten werden eine eigene Konstruktion des Begriffs Ellipse zu entwickeln und die eigene Vorstellung breit horizontal zu vernetzen.

Da bedingt durch die begrenzte Unterrichtszeit leider nicht allen die Möglichkeit gegeben werden kann jeden angebotenen Zugang umfassend für sich selbst zu ergründen, habe ich die Methode des Gruppenpuzzles für die Erarbeitung des Themas gewählt. Auf diesem Weg setzt sich jeder und jede mit einem Zugang intensiv auseinander und vertieft diese sogar, wenn die Ergebnisse der Gruppenarbeit im folgenden auch den Mitlernenden vorgestellt werden muss<sup>6</sup>. Auf diesem Wege erhalten alle Schülerinnen und Schüler einen Überblick über die in den anderen Gruppen erarbeiteten Darstellungsformen. Da der Austausch über die Verschiedenen Ergebnisse der ersten Gruppen in einer kleinen Gruppe geschieht, können die Schülerinnen und Schüler auch eigene Fragen, die sich während der eigenen Arbeit oder bei der Betrachtung der Ergebnisse der anderen Gruppen ergeben haben, in diesem kleinen Rahmen klären.

Im Anschluss an die Erfahrung mit den verschiedenen Zugängen soll mit einer Strukturierung der Informationen begonnen werden, in dem die Zugänge zu Gruppen geordnet werden. Dabei sollen Gemeinsamkeiten und Unterschiede herausgearbeitet werden. Insbesondere erwarte ich von den SuS, dass sie im Rahmen der Aufgabenstellung herausfinden, dass zwei

---

<sup>3</sup> im Sinne von Aebli „Denken ist Ordnen des Tuns“

<sup>4</sup> siehe Freudenthal 1973

<sup>5</sup> siehe auch „Computer Internet und Co im Mathematikunterricht“

<sup>6</sup> im Sinne von dialogischem Lernen nach Ruf/Gallin

der Darstellungen auf der Kenntnis von Brennpunkten und der Länge der großen Achse basieren (Gärtnerkonstruktion und Faltkonstruktion/Leitkreisconstruction). Diesen beiden gegenüber sollen die anderen vier Konstruktionen (Graph, Leiter, Scheitelkreis, Gehrung - siehe Anhang) als auf die Kenntnis der Längen der beiden Halbachsen basierend erkannt werden.

Quellen:

- Barzel, Bärbel; Hußmann, Stephan; Leuders, Timo: Computer, Internet & Co. im Mathematik-Unterricht, Cornelsen Verlag Scriptor, Berlin 2005
- Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes NRW: Richtlinien und Lehrpläne für die Sekundarstufe II – GY/GE in NRW Mathematik, Ritterbach Verlag, Frechen 2005
- Winter, Heinrich: 'Kreis und Ellipse' in Mathematik lehren Nr. 130, S. 14-19, Friedrich Verlag, Seelze 2005