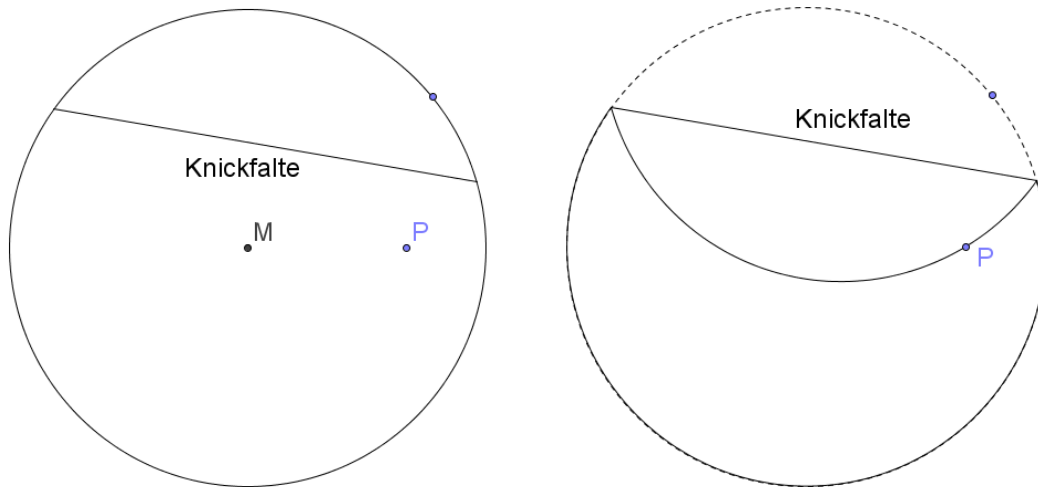


## Gruppe 1 - Faltkonstruktion



Ihr benötigt:

- Zirkel
- DIN-A4 Blatt
- Schere
- Lineal

Konstruktion (für jedes Mitglied der Gruppe):

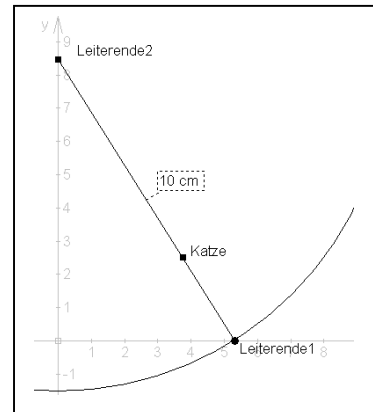
- Konstruiert mit dem Zirkel auf dem DIN-A4 Blatt einen Kreis mit möglichst großem Durchmesser. Markiert den Mittelpunkt  $M$  des Kreises.
- Markiert auf dem Rand des Kreises ca. 25 Punkte in etwa gleichmäßigem Abstand und schneidet danach den Kreis aus. Achtet darauf, die Markierungen so anzubringen, dass sie auch nach dem Ausschneiden noch zu erkennen sind.
- Markiert nun einen Punkt  $P$  innerhalb des Kreises. Die Lage dieses Punktes ist beliebig und sollte nicht zu nah am Mittelpunkt  $M$  bzw. am Rand des Kreises sein. Versucht in der Gruppe dennoch unterschiedliche Punkte zu wählen.
- Faltet nun zu jedem markiertem Punkt auf dem Rand euren Papierkreis so, dass der markierte Punkt auf dem gewählten Punkt  $P$  liegt (siehe Abbildung oben). Zieht die Faltkante so nach, dass sie nach dem aufklappen deutlich zu sehen ist.

**Aufgaben:**

1. Welche Beobachtung macht ihr nachdem ihr für alle Punkte die Faltung durchgeführt habt?
2. Findet Symmetrien der entstandenen Figur. Was könnt ihr über die Punkte  $M$  und  $P$  sagen? Gibt es weitere besondere Punkte eurer Figur? Wenn ihr besondere Punkte ausgemacht habt, beschreibt wie diese erzeugt wurden (z.B. durch welchen Faltvorgang).
3. Beschreibt die Lage der Geraden durch eine Faltkante im Bezug auf den Punkt  $P$  und den zugehörigen Punkt auf dem Rand.
4. Beurteilt wie sinnvoll die gleichmäßige Verteilung der Punkte auf dem Rand des Kreises ist.

## Gruppe 2 – Die Leiter an der Hauswand

Eine Leiter der Länge 10m steht zunächst senkrecht an einer Wand. Auf einer Sprosse ca. 3m vom Boden sitzt eine Katze. Die Leiter gleitet nun an der Wand nach unten und auf dem Boden nach rechts, bis sie vollständig auf dem Boden liegt. Auf welcher Bahn hat sich die Katze bewegt?



Modelliert diesen Zusammenhang mit Euklid DynaGeo und betrachtet die Bahn der Katze als Ortskurve.






Dazu wählt ihr einen Punkt auf der y-Achse (Punkt an dem die Leiter an der Hauswand liegt), zeichnet um diesen einen Kreis mit dem Radius 10 und wählt den Schnittpunkt mit der positiven x-Achse als Fußpunkt der Leiter. Nachdem ihr diese Strecke gezeichnet habt, wählt ihr einen Punkt auf dieser Strecke als Sprosse für die Katze.

Nun könnt ihr euch die Ortslinie der Katze anzeigen lassen, während ihr die Leiter an der Hauswand entlang rutschen lasst.

### Aufgaben:

1. Welche Beobachtungen macht ihr?
2. Wie verändert sich die Bahnkurve, wenn die Katze auf einer höheren oder niedrigeren Sprosse sitzt?
3. Welche Bedeutung hat der Abstand der Katze zu den Enden der Leiter?
4. Erstellt für jedes Mitglied der Gruppe eine Skizze der Bahnkurve auf einem DIN-A4 Blatt (mit Koordinatensystem) und deutet dort auch eine Leiterposition an.

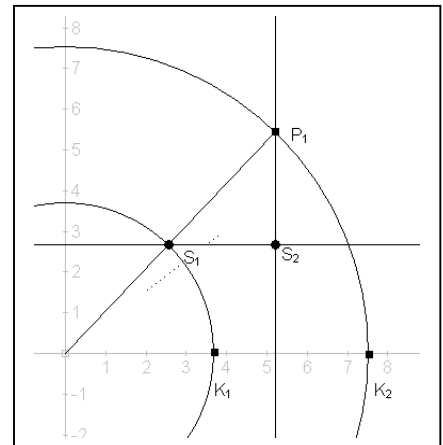
Zur Erinnerung ein paar Tipps zur Bedienung von Euklid DynaGeo:

-  Erzeugt einen Punkt (man kann auch Punkte mit Koordinaten (x/y) erzeugen)
-  Erzeugt eine parallele Gerade
-  Erzeugt den Schnittpunkt von zwei Kurven
-  Bindet einen Punkt an eine Kurve
-  Stellt die Ortslinie eines Punktes dar

Unter dem Menü Messen&Rechnen kann die Ansicht des Koordinatensystems eingeschaltet werden.

## Gruppe 3 - Scheitelkreise<sup>1</sup>






Konstruiert in Euklid DynaGeo zwei konzentrische Kreise  $K_1$  und  $K_2$  mit dem Mittelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems. Wählt einen Punkt  $P_1$ , der sich auf dem Kreis mit dem größeren Radius befinden soll. Stellt dann den Strahl vom Ursprung des Koordinatensystems durch  $P_1$  dar. Der Schnittpunkt dieser Strecke mit dem kleineren Kreis sei der Punkt  $S_1$ . Zieht nun die Parallele durch  $P_1$  zur  $y$ -Achse und die Parallele durch  $S_1$  zur  $x$ -Achse. Der Schnittpunkt dieser beiden Geraden sei  $S_2$ . Betrachtet die Ortslinie des Punktes  $S_2$ , wenn ihr  $P_1$  auf dem Kreis variiert.



### Aufgaben:

1. Welche Beobachtungen macht ihr?
2. Welche Symmetrien hat die Ortslinie? Was passiert, wenn ihr die Radien der Kreise verändert? Gibt es Extremfälle?
3. Der Abstand der Parallelen zur  $x$ -Achse hängt direkt von dem Winkel der Strecke  $OP_1$  zur  $x$ -Achse ab. Gebt nach Möglichkeit die Funktion an. *Tipp:* Sucht ein rechtwinkliges Dreieck.
4. Erstellt für jedes Mitglied der Gruppe eine möglichst repräsentative Darstellung dieser Kurve auf einem DIN-A4 Blatt.

Zur Erinnerung ein paar Tipps zur Bedienung von Euklid DynaGeo:

-  Erzeugt einen Punkt (man kann auch Punkte mit Koordinaten  $(x/y)$  erzeugen)
-  Erzeugt eine parallele Gerade
-  Erzeugt den Schnittpunkt von zwei Kurven
-  Bindet einen Punkt an eine Kurve
-  Stellt die Ortslinie eines Punktes dar

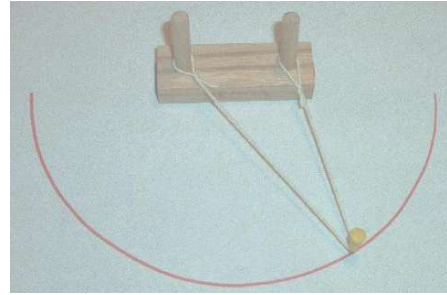
Unter dem Menü Messen&Rechnen kann die Ansicht des Koordinatensystems eingeschaltet werden.

<sup>1</sup> Auch Konstruktion nach de la Hire oder Proklus genannt

## Gruppe 4 - Gärtnerkonstruktion

Ihr benötigt:

- Seil
- Holzlatte mit Pins
- einen Stift und ein Blatt
- Lineal



Konstruktion (für jedes Mitglied der Gruppe):

- Legt die Holzlatte mit den beiden Pins möglichst mittig auf das Blatt. Wichtig ist, dass ihr die Position der beiden Pins auf dem Blatt markiert.
- Befestigt die beiden Enden eures Seils an den Pins.
- Mit dem Stift wird das Seil nun straff gespannt, dabei wird der Stift senkrecht aufgesetzt.
- Mit gespanntem Seil wird nun erst eine Hälfte der Ellipse gezeichnet, und nach erneutem Ansetzen die andere Hälfte.
- Zeichnet mehrere Ellipsen (z.B. mit gleichem Faden oder gleichem Pinabstand) auf ein Blatt. Ihr könnt dazu unterschiedliche Farben benutzen. Notiert auf dem Blatt immer auch, welche Position der Pins bzw. welche Seillänge dazugehört.

**Aufgaben:**

1. Notiert Eure Beobachtungen während der Konstruktion!
2. Beschreibt die Auswirkungen der Fadenlänge auf die Konstruktion. Kann die Fadenlänge an der Kurve abgelesen werden? Von welcher weiteren Größe hängt die Form der Kurve ab?
3. Welche Symmetrien hat die Kurve?
4. An welchem Punkt ist der Abstand des Stifts zu den beiden Pins (Punkte  $F_1$  und  $F_2$ ) gleich groß? Skizziert diese Situation in eine eurer Ellipsen.

## Gruppe 5 – Gleichung und Graph

Untersucht die Gleichung  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Wie sieht der Graph für unterschiedliche  $a$  bzw.  $b$  aus?

Wenn man die Gleichung nach  $y$  auflöst, erhält man:  $y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$  bzw.

$$y = \sqrt{b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} \quad \text{und} \quad y = -\sqrt{b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}$$

Mit diesen Gleichungen könnt Ihr für fest gewählte Werte  $a$  und  $b$  und jeden Wert von  $x$  zwei zugehörige  $y$ -Werte ausrechnen.

*Hinweis:* An jeder der Gleichungen kann man erkennen, dass für  $x$  nur Werte zwischen  $-a$  und  $a$  gewählt werden dürfen, sonst ist die Gleichung nicht mehr erfüllt (z.B. negativer Wert unter der Wurzel).

Jedes Gruppenmitglied wählt einen Wert für  $a$  zwischen 1 und 10 und berechnet daraus sein  $b$  durch  $b=11-a$ . Keine zwei Gruppenmitglieder wählen den gleichen Wert für  $a$ .

Erstellt nun eine Wertetabelle, in der Ihr für 20  $x$ -Werte ( $-a \leq x \leq a$ ) die zugehörigen beiden  $y$ -Werte bestimmt. Die so ermittelten Punkte tragt Ihr in ein Koordinatensystem mit 1LE=1cm ein und verbindet sie durch eine Kurve. Wenn es Euch einfacher fällt, könnt Ihr die Wertetabelle auch mit Excel erstellen.

Berechnet weitere Werte, wenn die Werte für eine Kurve nicht ausreichend sind.

### Aufgaben:

1. Welche Symmetrien hat die Kurve?
2. Wo findet ihr die Werte  $a$  und  $b$  im Graphen wieder?
3. Was erwartet ihr für  $a=b$ ?
4. Wie können  $a$  und  $b$  gewählt werden, damit der Graph durch den Punkt  $Q(2/4)$  verläuft?

**Tipp:** Die Formel muss in Excel in etwa folgende Form haben

$$=\text{WURZEL}(\$C\$3^2*(1-B6^2/\$C\$2^2))$$

bzw.

$$=\text{WURZEL}(b^2*(1-B6^2/a^2))$$

## Gruppe 6 – Gehrungsschnitte eines Rohrs



Ihr habt ein Rohr bekommen, das in mehrere unterschiedliche Teile zerschnitten wurde. Zeichnet die Umriss der Schnittflächen so in ein Koordinatensystem auf ein Din-A4 Blatt, dass ihr Zusammenhänge zwischen den Querschnittsflächen herstellen könnt. Überlegt euch vorher wie ihr die Lage der einzelnen Teilstücke wählt. Jedes Gruppenmitglied soll mehrere Querschnittsflächen auf ein einziges DIN-A4 Blatt abgezeichnet haben, um dies in der zweiten Phase des Gruppenpuzzles vorstellen zu können.

### Aufgaben:

1. Welche Beobachtungen macht ihr? (z.B. Ähnlichkeiten zwischen den Querschnittsflächen, Übereinstimmungen, größte oder kleinste Querschnittsfläche, ...)
2. Bestimmt die Symmetrien der Umriss.
3. Der Wechsel von einer Ellipse zu einer anderen erfolgt durch eine Streckung oder Stauchung. Gebt die Stauchung zwischen zwei Ellipsen auf eurem Blatt an.
4. Könnt Ihr jeder Querschnittsfläche eine Zahl bzw. einen Wert zuordnen, der sie eindeutig beschreibt und von den anderen unterscheidet? Gibt es evtl. mehrere solcher Kenngrößen?
5. Stellt aus einem Kreisumriss des Rohres zeichnerisch auf einem Blatt einen möglichst großen Querschnitt her, der auf ein DIN-A4 Blatt passt.

## Arbeitsauftrag für die Expertenrunde:

Ziel dieser Expertenrunde ist die Erstellung eines Plakats auf dem die verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten der Ellipse zueinander in Beziehung gesetzt werden sollen.

- Stellt jeweils untereinander die Ergebnisse eurer ersten Gruppe vor (nur in groben Zügen, da sich alle Gruppen mit der Ellipse beschäftigt haben, ungefähr 2 Minuten pro Gruppe)
- Untersucht, wie die angegebenen Paare von Darstellungsmöglichkeiten zueinander in Beziehung stehen:

Ellipse als Gehrungsschnitt	↔	Faltkonstruktion
Gärtnerkonstruktion	↔	Katze auf der Leiter
Gleichung	↔	Scheitelkreise

Beschreibt falls möglich einen Weg, von einer Darstellung in die andere zu wechseln, erläutert Zusammenhänge und Ähnlichkeiten oder beschreibt die Schwierigkeiten, die einem Wechsel der Darstellungsmöglichkeiten im Wege stehen.

**Hinweis:** Arbeitet dazu zunächst in den Teams zusammen, in denen die jeweiligen Darstellungsformen auch in der ersten Gruppenrunde bearbeitet wurden.

- Erarbeitet gemeinsam ein Plakat, auf dem ihr die 6 betrachteten Darstellungsformen wiedergibt und die Ergebnisse zu den von Euch untersuchten Beziehungen darstellt.

## Arbeitsauftrag für die zweite Phase:

Ziel dieser Runde ist es Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Verschiedenen Darstellungsformen der Ellipse herauszufinden.

- Stellt jeweils untereinander die Ergebnisse eurer ersten Gruppe vor
- Vergleicht die einzelnen Darstellungsformen der Ellipse und fasst diese in Gruppen zusammen.

Beantwortet dabei nach Möglichkeit folgende Fragen:

- Welche Größen bestimmen die Form der Ellipse in dieser Darstellungsform? Wo finde ich diese Größen bei der gezeichneten Ellipse wieder?
  - Welche Kriterien legen die Gruppenzugehörigkeit fest?
  - Kann eine Ellipse, die mit einer Darstellungsform erstellt worden ist leicht auch durch eine oder mehrere der anderen Darstellungsformen konstruiert werden?
- Erarbeitet gemeinsam eine Präsentation (evtl. auf Folie oder an der magnetischen Tafel), anhand der ihr erläutern könnt, wie und warum Ihr die Zuordnung der Darstellungsformen zu den von Euch gewählten Gruppen vorgenommen habt.



**Hausaufgabe:**

Bei der Faltkonstruktion ist der Radius  $r$  des Kreises und der Abstand  $d$  der Punkte  $M$  und  $P$  gegeben. Die Hauptachse der Ellipse (Strecke  $AB$ ) hat ebenfalls die Länge  $r$ . Bestimme die Länge der kleinen Halbachse (Strecke  $ED$ ) der Ellipse!

**Tipp:** Betrachte die in der Abbildung dargestellte Situation, in der die Knickfalte durch den zu der kleinen Halbachse gehörenden Punkt  $E$  der Ellipse verläuft. Die Knickfalte halbiert dabei die Strecke  $PC$  und ist parallel zur Geraden durch  $A$  und  $B$ .

